2.1.a.3

ÁREAS DE DIFICULTADES EN LA ADQUISICIÓN DEL LENGUAJE ARITMÉTICO-ALGEBRAICO

Aurora Gallardo[1], Teresa Rojano[1]

ABSTRACT

This paper is a part of a clinical study immersed in the project «Acquisition of Algebraic Language», carried out by a research team at the Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (México City, 1982-1987).

The whole study has as its main purpose to isolate and analyse transition phenomena from arithmetic to algebraic thought. Thus, three generations of 12-13 year olds were interviewed and, at a first stage, only children displaying an upper proficiency level were analysed (See Filloy/Rojano [12-15] and Rojano [23]).

In this article, the authors reportresults on the analysis of clinical interviews carried out (at a second stage of the study) with children displaying a low proficiency level, with regards to their pre-algebraic skills. The most relevant result of this second analysis was the identification of common difficulties areas in the leaming of Algebra which have characteristic manifestations in the lower levels. Moreover, the identification of such areas allowed us to recognize the essential problematic issues, in particular the extreme difficulty that negative numbers represent within the context of solving linear equations.

RÉSUMÉ

Cet article fait partie d'un étude clinique menée dans le cadre du projet «Acquisition du langage algébrique» conduit par une équipe de chercheurs de la Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Ville de México, années 1982-1987).

L'étude dans son ensemble, a comme but principal celui d'isoler et d’analyser les phénomènes de transition de la pensée arithmétique vers la pensée algébrique. Pour cela, des entretiens avec des enfants âgés de 12 à 13 ans de trois niveaux ont été réalisés et, dans la première étape de la recherche, on n’a analysé que le comportement pré-algébrique des enfants d'un haut niveau de performance (Voir Filloy/Rojano [12-15] et Rojano [23]).

Dans cet article, les auteurs rapportent les résultats de 1'analyse des entretiens réalisés dans la deuxième étape de la recherche, cette fois avec des enfants d'un niveau bas par rapport aux habilités pré-algébrique. Le résultat le plus pertinent dans cette deuxième analyse a été 1'identification de difficultés communes dans l'apprentissage de l'aigèbre qui présentent des caractéristiques propres au niveau bas. De plus, cette identification a permis de reconnaître les zones problématiques essentielles, particulièrement la difficulté extrême que représentent les nombres négatifs dans le contexte de la résolution d'équations linéaires.

RESUMEN

El presente artículo forma parte de un estudio clínico inmerso en el proyecto «Adquisición del Lenguaje Algebraico» realizado por un equipo de investigadores de la Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Ciudad de México, años 1982-1987).

El estudio en su conjunto, tiene como propósito principal aislar y analizar los fenómenos de transición del pensamiento aritmético al algebraico. Para ello, tres generaciones de niños de 12-13 años de edad fueron entrevistados y, en la primera etapa de la investigación, sólo se analizó el comportamiento pre-algebraico de los niños de alto nivel de aprovechamiento (véase Filloy/Rojano [12-15] y Rojano [23]).

En este artículo, los autores reportan los resultados del análisis de entrevistas, que en una segunda etapa, se llevó a cabo con niños de bajo nivel en relación a las habilidades pre-algebraicas. El resultado más relevante de este segundo análisis fue la identificación de áreas de dificultades comunes en el aprendizaje del álgebra que presentan características propias de los niveles bajos. Además, la identificación de esas áreas permitió reconocer las zonas problemáticas esenciales, en particular la dificultad extrema que presentan los números negativos en el ámbito de las ecuaciones lineales.

[1] Sección de Matemática Educativa, Nicolás San Juan nº 1421, Col. Del Valle, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, C.P. 03100. México D. F.

Antecedentes: **El estudio «Operación de la incógnita»**

Entre las investigaciones recientes sobre los fenómenos de transición del pensamiento aritmético al algebraico, se encuentra el estudio «Operación de la Incógnita», realizado en la Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados y el Centro Escolar Hermanos Revueltas de la Ciudad de México, entre los años 1982 y 1987.

Aunque fue el método clínico el que se utilizó en buena parte de este estudio, es la conjugación de dicho método con el tratamiento epistemológico de la problemática lo que constituye la esencia metodológica de la investigación. Así, de la indagación y análisis de métodos y estrategias de resolución de ecuaciones, pertenecientes a la etapa pre-simbólica del Algebra (Textos de Abbaco [3, 6, 8, 16, 22] de la etapa previa al «Arte Analítico» de F. Vieta [26] se desprende una conjetura, interesante de poner a prueba con los sujetos que se encuentran en los inicios del aprendizaje del Algebra (Filloy/Rojano [11]). Dicha conjetura consiste en la localización de un corte didáctico en el momento en que aparece como necesario operar «lo representado», es decir, en el caso de la resolución de ecuaciones, operar las incógnitas. De manera más precisa y ya en el terreno de la enseñanza, este momento coincide con el momento en que los niños ya han aprendido a resolver ecuaciones lineales con una sola ocurrencia de la incógnita (de la forma $Ax \pm B = C$, con A, B y C como números particulares) y para lo cual basta con realizar operaciones sobre los datos de la ecuación (A, B y C) (acciones en el ámbito aritmético) pero que aún están por aprender a resolver ecuaciones con más de una ocurrencia de la incógnita (de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$) para lo cual se requiere de operar no sólo los datos, sino también la cantidad a encontrar (acciones en el ámbito algebraico).

Debido a la naturaleza de las acciones que implica resolverlas, llamamos «aritméticas» al primer tipo de ecuaciones y «no aritméticas» a las del segundo tipo.

El término ruptura o corte didáctico, aquí es utilizado en el sentido que G. Brousseau habla del obstáculo didáctico de origen epistemológico. Es decir, nos referimos al tipo de obstáculo que no puede, ni debe escapar del hecho mismo de su papel constitutivo del conocimiento al que se apunta y que es frecuente encontrar en la historia de los conceptos mismos [5]. La palabra corte o ruptura se emplea para enfatizar el hecho de que el obstáculo en cuestión (el operar lo representado) se localiza en la frontera entre dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico. Estos conocimientos son tales que para dar paso al segundo (el algebraico) es necesario romper con conceptos y hábitos del primero (el aritmético), pero que a su vez, se requiere de extender las nociones y acciones asignadas a los objetos aritméticos a un nuevo universo de objetos que incluye a los algebraicos. Nos referimos específicamente a los objetos o elementos constitutivos de las ecuaciones, es decir, los coeficientes (inicialmente de naturaleza aritmética), las incógnitas (de naturaleza algebraica) y los signos +, -, = (de naturaleza dual).

«Operación de la Incógnita», en su etapa clínica, revela el corte didáctico anteriormente señalado como una etapa de cambios esenciales necesarios para transponer las fronteras entre el pensamiento aritmético y el algebraico y, por tanto, como un muy adecuado momento de observación de fenómenos didácticos presentes en dicha transición.

Los resultados obtenidos en la parte clínica, así como el estudio previo de carácter epistemológico se reportan en distintos documentos (véase Filloy/Rojano [12-15] y Rojano [23-241). En el presente artículo se muestran los resultados obtenidos del análisis de las entrevistan clínicas realizadas, en el momento de enseñanza del álgebra ya mencionado, con estudiantes del llamado nivel bajo (o de bajo rendimiento escolar) en el pre-álgebra, los cuales fueron excluidos del análisis en una primera fase del estudio, a fin de contar con una manifestación más nítida de los fenómenos a observar. Sin embargo, la investigación en el nivel bajo destaca, entre otros, un hecho relevante: los sujetos de este nivel proporcionan una versión amplificada de los hechos observados con los niños de los niveles más altos. Esta versión brinda nuevos elementos de análisis respecto a los cambios conceptuales que median entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

§1 Delimitación y Ubicación del Problema

La investigación en torno a problemas teóricos en el campo de la enseñanza del álgebra se ha desarrollado notablemente en las últimas décadas. Se mencionarán brevemente y a manera de antecedentes, algunos estudios realizados en esta dirección en diversos países. En primera instancia, cabe mencionar los trabajos de análisis teórico de G. Glaeser y de H. Freudenthal. G. Glaeser [19], 1981, señala como uno de los objetivos más importantes de la didáctica de las matemáticas, el determinar los obstáculos que se oponen a la comprensión y al aprendizaje de esta ciencia. Basándose en métodos históricos y epistemológicos lleva a cabo un examen de los documentos del pasado que le permiten detectar estos obstáculos. Plantea además el emprender experiencias con los alumnos para investigar las consecuencias que estos conflictos epistemológicos ocasionan en la enseñanza de las matemáticas. En el caso particular de la didáctica del álgebra, existen trabajos como el de H. Freudenthal [9], 1983, que se enfrentan con la problemática de convertir el álgebra simbólica, por medio de la enseñanza, en un lenguaje para ser aprendido y utilizado. Esto conlleva al estudio de las condiciones en que la práctica de este lenguaje sea posible, debido a que no se emplea con frecuencia en la vida cotidiana y la sintaxis algebraica no es adquirida en forma natural por el sujeto.

En relación a trabajos que pretenden introducir la investigación experimental en la enseñanza, existe una larga lista de autores de la que se mencionarán solamente aquellos que fueron consultados para la presente investigación. En la mayor parte de estos trabajos se advierten cambios conceptuales en la transición de la aritmética al álgebra. El trabajo de L. Booth [4], 1984, se aboca a la investigación de las causas de los errores en álgebra a nivel secundaria. Forma parte de un estudio más general, el proyecto CSMS: Conceptos en la Matemática y en la Ciencia de la Secundaria, llevado a cabo en Inglaterra. Los propósitos del proyecto son: 1) investigar las causas fundamentales que ocasionan la frecuencia y persistencia de errores a través de los años, 2) explorar la efectividad de módulos breves de enseñanza diseñados para corregir o evitar estos errores. El trabajo de M. Matz [20], 1982, se propone explicar la sorprendente uniformidad de los errores cometidos por los estudiantes al resolver problemas algebraicos en el nivel medio superior. Su investigación demuestra que cierta clase de errores frecuentes en el álgebra elemental son el resultado de una adaptación sistemática del conocimiento anterior que se ha generalizado o extrapolado en forma inadecuada. Esta perspectiva le permite clasificarlos en tres categorías: 1) errores generados por la elección incorrecta de una técnica de extrapolación; 2) errores que reflejan un conocimiento básico correcto pero deficiente; 3) errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento.

De corte teórico-experimental cabe mencionar los trabajos de S. Wagner, C. Kieran y G. Vergnaud, A. Cortés. S. Wagner [27], 1981, investiga las diversas interpretaciones que adquieren las literales en las expresiones algebraicas. Al referirse a las variables matemáticas, distingue tres componentes: símbolo, contexto y referente. De las relaciones entre ellas, se derivan tres roles de la variable: el rol semántico, el rol sintáctico y el rol matemático. Por su parte C. Kieran [21], 1982, se aboca a la identificación de algunos factores conceptuales subyacentes al aprendizaje del álgebra elemental. Descubrió tres esquemas erróneos muy acendrados en una muestra de alumnos de 12 a 13 años de edad. La investigación se llevó a cabo antes de que los estudiantes recibieran instrucción formal en álgebra. Los esquemas identificados por medio de entrevista clínica son los siguientes: 1) esquema de cuasi-igualdad, 2) esquema de redistribución y, 3) esquema de resolución. En el trabajo de G. Vergnaud y A. Cortés [25], 1986, se manifiesta que el álgebra representa una ruptura epistemológica en relación a la aritmética. En una situación problemática, en lugar de manejar un lenguaje natural con herramientas intuitivas (teoremas en acción), los estudiantes tienen que manipular cadenas de símbolos con reglas explícitas dando lugar a varias dimensiones del cambio: explícito-implícito, lenguaje simbólico-lenguaje natural, algoritmia-heurística.

Por último, en cuanto a propuestas de enseñanza dentro del campo del álgebra elemental, cabe señalar los estudios de A. Bell y Davydov. El primero, A. Bell [2], 1983, se basa en una «enseñanza con significado» que propone la utilización de modelos concretos para la resolución de ecuaciones lineales.

Asimismo, crea situaciones concretas con el propósito de desembocar en el planteamiento de las ecuaciones mencionadas. En el trabajo de Davydov [10], 1974, se afirma que la mayoría de los problemas aritméticos, en cuanto traspasan las fronteras del simple cálculo, muestran el mismo carácter; esto es, son enteramente problemas algebraicos que apuntan al establecimiento de ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales. De hecho, considera que los ejemplos numéricos no son los apropiados para trabajar algebraicamente. Experimentó la introducción de los símbolos literales como un medio para describir las relaciones entre magnitudes. La notación literal se enseñó a los niños inmediatamente después de que se hubieron familiarizado con la sucesión de números cardinales y antes de aprender las fracciones. De hecho, este acercamiento ofrece la perspectiva de modificar las ideas tradicionales sobre la relación entre los números y los símbolos literales en las primeras fases de la enseñanza.

Ahora bien, el contenido que conforma el presente artículo, se ubica dentro del proyecto general sobre la «Evolución de la Simbolización en la Población Escolar del Nivel Medio» desarrollado en la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV en la ciudad de México, desde 1982. La metodología utilizada en el proyecto de investigación apunta en dos direcciones:

1. Hacia el campo del desarrollo histórico de las ideas matemáticas.
2. Hacia el campo de la investigación educativa.

En esta segunda dirección se contempla la investigación «Operación de la Incógnita»[2] donde se realiza un estudio transversal (períodos escolares 82-83, 83-84, 84-85) de una población de estudiantes de 12 a 13 años de edad en un sistema de enseñanza controlada[3], Mediante diagnóstico previo, se determinaron los antecedentes de la población estudiantil en relación a diversos subtemas del pre-álgebra. Esto condujo a una clasificación específica para cada subtema, resultando cuatro niveles: alto (A), medio (M), bajo (B) y cero. Dado que el trabajo está enfocado a estudiar las dificultades de los alumnos al hacer uso del lenguaje algebraico, tanto la clasificación por niveles como la posterior selección de la muestra a entrevistar, se sustentaron en un análisis de estrategias y errores en base a criterios cuantitativos y cualitativos (según cuántos ítems y de qué tipo se resolvían). De hecho, se dividió la población en base a una tabla espacial de contingencias de los ejes: ecuaciones con literales, ecuaciones sin literales y semántica del álgebra elemental. Los niveles o clases resultantes, alta, media, baja o cero, las conforman sujetos que se ubicaron consistentemente en alguna de tales clases respecto a los tres ejes o sub-temas evaluados.

Es importante señalar que esta clasificación no debe asociarse con ninguna estratificación de tipo estadístico.

El test pre-algebraico

En la página siguiente se muestra el tipo de ítems que conformaron el test pre-algebraico.

[2] Véase: Antecedentes; El estudio -«Operación de la Incógnita» página 2. de este artículo.

[3] En el sistema de enseñanza controlada (SEC) es factible intervenir directamente sobre los contenidos, acercamientos y ritmos de enseñanza en el áreas de Matemáticas. Asimismo, se puede llevar a cabo un seguimiento grupal e individual de la enseñanza y aprendizaje, así como participar en el proceso de enseñanza y llevarlo por caminos alternos, cuando el caso lo requiere. En el momento de la observación, *todos* los niños habían sido enseñados a resolver ecuaciones «aritméticas», como las que aparecen en el test pre-algebraico (véase pag. 8, de este artículo), pero *no* habían recibido instrucción alguna para resolver ecuaciones ««no-aritméticas», es decir, con ocurrencias de la incógnita en ambos miembros de la ecuación.

Ecuaciones <u>sin</u> literales	Ecuaciones <u>con</u> literales	Semántica del Algebra Elemental. (Problemas)
☐ + 788 = 4,358 573 + ☐ = 1,637 ☐ - 1,882 = 1,825 374 - ☐ = 175 3 x ☐ = 12 3 x ☐ = 57 3 x ☐ = 111 3 x ☐ = 111,111 28 + ☐ = 7 ☐ + 7 = 8 182 + ☐ = 13 ☐ + 14 = 17 6 x ☐ = 15,502	x + 4 = 16 x - 8 = 9 x + 8.46 = 19.06 x - 6.018 = 7.821 x + 18 = 6 117 - x = 49 45 + x = 83 6 x x = 108 45 ÷ x = 3 x ÷ 3 = 23 7 x = 42 2 x = 5 3/x = 7/8 x/5 = 4/9 (x + 7) x 4 = 32 5 x (x + 2) = 20 (x + 9) x 8 = 136 11 x (x + 13) = 297	1. <u>Traducción</u> de enunciados verbales a ecuaciones. 2. <u>Resolución</u> de problemas de enunciado verbal.

Una vez establecidas las clases o niveles, se encontró que los sujeto idóneos para la observación de los fenómenos de transición del pensamiento aritmético al algebraico son los pertenecientes al nivel alto. Debido a ello, el estudio clínico «Operación de la Incógnita», en su primera etapa consistió fundamentalmente del análisis de entrevistas de dicho nivel.

Ahora bien, tomando como punto de partida los resultados de esta primera etapa de la investigación, se ha elaborado el presente trabajo donde se estudia la asimilación y comprensión por parte del sujeto del conocimiento escolarizado previo a las primeras ecuaciones no aritméticas, esto es, el pre-álgebra. Asimismo se analizan las dificultades que persisten aún después de la instrucción sobre el tema. En este caso, los sujetos idóneos para la observación de estas manifestaciones son los pertenecientes a los niveles bajo y cero.

§2 Formulación de los Objetivos del Estudio

1. Identificación de áreas de dificultades en el aprendizaje del álgebra elemental que conduzca a la construcción de una didáctica de la misma.
2. Análisis del uso del álgebra por el niño, a fin de contribuir a una teoría sobre el lenguaje algebraico que permita explicar los hechos observados.
3. Reflexión sobre la utilización del método clínico como técnica de investigación.

§3 Planteamiento de las Hipótesis del Problema

1. Existen áreas de dificultades comunes en el aprendizaje del álgebra que manifiestan características propias en los niveles bajo y cero.
2. Los estudiantes de los niveles bajo y cero utilizan recursos no contemplados en el hecho didáctico.
3. La clasificación por niveles depende del objetivo del estudio y no es propia del sujeto.
4. Al descender en la escala de niveles, aumenta la autonomía del estudiante respecto a los métodos escolarizados.

§4 El Método Clínico

Para llevar a cabo la confrontación de las hipótesis planteadas, se utilizó el análisis e interpretación de entrevistas individuales videograbadas. La técnica utilizada en la entrevista se caracteriza por el control moderado por parte del entrevistador y la libertad que tiene el entrevistado para expresarse espontáneamente. A partir de una serie de secuencias básicas de ítems, el entrevistador se dedica a elucidar los puntos dudosos, a refrasear las respuestas del entrevistado y a profundizar en la situación planteada. Debido a que la mayoría de los hechos «estaban por indagarse», el protocolo de la entrevista fue muy flexible y se modificaba según las circunstancias lo requerían. Así, cuando la situación resultaba muy compleja para el entrevistado, se recurría a una más simple o familiar, regresándose posteriormente a la situación primera.

Esta técnica de entrevista puede ser ubicada en un punto intermedio en la clasificación dada por Cohen y Manion [7], la cual consiste en una escala que va desde la entrevista con una estructura y protocolo rígidos hasta aquélla en la que el entrevistador juega un papel de total subordinación respecto al entrevistado.

El protocolo básico de las entrevistas de este estudio consta de cinco series, a saber:

— La serie E de Ecuaciones de la forma $X \pm A = B$, $AX = B$, $A \times (X \pm B) = C$ y $(X \pm A) \times B = C$, donde A, B y C son enteros distintos de cero. (Ecuaciones Aritméticas)[4].

La finalidad de esta serie es la de corroborar los resultados del test pre-algebraico escrito, respecto a la ubicación por niveles de los sujetos a entrevistar. El recurso pre-algebraico de «deshacer» las operaciones con números es suficiente para resolver estas ecuaciones.

— La serie C de Cancelación: $x \pm A = B \pm A$, $Ax \pm B = x \pm B$; $x \pm x/A = B \pm x/A$ y $x + x = A + x$.

Esta serie contiene ecuaciones que para su resolución no es necesario operar la incógnita, pero sí entra en juego una interpretación de la igualdad más evolucionada que la mera interpretación aritmética (procedimiento == resultado). Se requiere concebir la igualdad como equivalencia de expresiones y el propósito es observar si hay indicios de esta concepción en el conocimiento pre-algebraico de los niños.

— La serie I (Operación de la Incógnita) que presenta ítems como $Ax \pm B = Cx$ y $Ax \pm B = Cx \pm D$ (Ecuaciones no aritméticas [5]).

En esta serie, los sujetos se enfrentan por primera vez (con sólo sus recursos pre-algebraicos) a la resolución de este tipo de ecuaciones. En buena parte de la serie sí es necesario operar la incógnita, por ejemplo: $8x + 30 = 5x + 9$.

— Por último, las series de Resolución e Invención de Problemas que contemplan las ecuaciones presentadas en las series anteriores.

El propósito de esta serie es observar los ataques espontáneos de los niños al nuevo tipo de ecuaciones (como las de las series C e I), cuando éstas se les presentan en forma de enunciados de problemas verbales, posibilitando así la observación de una interacción entre los aspectos semántico y sintáctico de la resolución de ecuaciones en este momento de transición.

(Nota: Al niño se le presentan ecuaciones con A, B, C y D números particulares; la consigna general en las series de ecuaciones es: «*encontrar el valor de x*»).

---

4 Véase: Antecedentes: El estudio «Operación de la Incógnita», página 2 de este artículo.

5 Véase: Antecedentes: El estudio «Operación de la Incógnita», página 2 de este artículo.

§5 Áreas de Dificultades comunes en el Aprendizaje del Algebra Elemental

Las áreas identificadas fueron las siguientes:

I) Operaciones,

II) Naturaleza de los números,

III) Métodos primitivos: la estrategia del tanteo,

IV) Métodos escolarizados: el esquema,

V) Interacción entre semántica y sintaxis del álgebra elemental, y

VI) El corte didáctico en el estudio de las ecuaciones lineales.

Ahora bien, el análisis presentado de estas áreas se restringe a tratar de explicar los hechos observados por el método clínico. De ninguna manera se pretende un estudio profundo de las mismas pues se está consciente de la compleja problemática que a nivel teórico posee cada una de ellas.

Se observa que estas áreas de dificultades no son ajenas entre sí, ya que sufren traslapos continuamente. Por ejemplo, las áreas de Operaciones y Naturaleza de los Números emergen simultáneamente con respecto al problema de los números negativos (pag. 17). Así, también, la dificultad de concebir la ecuación algebraica como igualdad condicionada, que se analiza en el área de Operaciones, surge en la invención de problemas asociados a ecuaciones, el tema del área de semántica y sintaxis (pag.21). Por otra parte, la utilización de los métodos escolarizado y primitivo permean todas las áreas. Sin embargo, analizar las áreas de dificultades separadamente, aporta una mayor comprensión respecto a la adquisición de conceptos y al desarrollo de habilidades operatorias por parte del individuo.

Cabe señalar que el propósito de este estudio no radica en indicar la multitud de errores cometidos por el estudiante, ya que la mayor parte de estos tropiezos se reportaron en una gran cantidad de trabajos sobre el tema [4, 12, 13, 14, 20, y 21]. Tampoco, en esta etapa del trabajo, se intenta remitir al terreno epistemológico el análisis de cada una de las áreas de dificultades comunes detectadas. Lo que sí resulta relevante es llevar a cabo la agrupación de estos errores en dichas áreas, ya que ello permite reconocer de inmediato las zonas problemáticas esenciales. Esta forma de abordar la situación está en concordancia con la metodología general de la investigación en su conjunto pues, al término del trabajo en el terreno clínico, se reconoce la necesidad de retomar el discurso a nivel epistemológico y de historia de las ideas matemáticas, para realizar una indagación profunda de las causas que originaron las zonas de dificultad observadas. Esto posibilitará, en una etapa posterior del trabajo, el establecimiento de hipótesis basadas en la construcción del conocimiento general a fin de verterlas en el campo de la didáctica de las matemáticas.

A continuación se describen brevemente las áreas mencionadas.

I) OPERACIONES

I.1 *Dualidad de la Operación*. Las letras no constituyen una notación muy intuitiva para los valores simbólicos ya que no parecen referirse a números en una primera instancia. Aunque las abstracciones se introducen frecuentemente en aritmética, vía «cuadros vacíos» en oraciones numéricas como $3 + \square = 7$, este concepto no se generaliza en forma natural al de valor simbólico. Los «cuadros vacíos» no son «manipulados» en las ecuaciones ni «deformados» por operaciones que alteren su estructura sino que tienen la connotación inherente de «ser llenados». Ya que el «cuadro vacío» no está asociado claramente con una letra, los estudiantes no advierten en principio, que las variables pueden ejemplificarse por medio de números. Así, ante 2x comúnmente responden —«No puedes multiplicar por x porque no sabes qué es x.»— De hecho, la noción aritmética de «hacer una operación» como la multiplicación se transforma en «cómo denotar el resultado». Por otra parte, cuando aparecen los signos +, -, x, ÷, $\sqrt{\ }$, $(\ )^2$ en las ecuaciones, el estudiante se resiste a aceptar una expresión algebraica como resultado y ejecuta acciones de inmediato. ¡He aquí la dualidad de la operación! La permanencia o la acción ante una orden de ejecución.

I.2 *Lectura de la Operación*. En general, las operaciones aritméticas se realizan en forma vertical. En álgebra, domina la lectura horizontal de la operación de las ecuaciones. Estas direcciones en la lectura aunadas al uso del «más» y el «menos» considerados a la vez operadores binarios y unarios, ocasionan dificultades. Por ejemplo, en el ítem x + 1568 = 392 se presentaron ambas lecturas. Para resolver la ecuación anterior un alumno usa calculadora y verbaliza: «A 392 le resté 1568. Me dio -1176». Leyó horizontalmente la expresión. Sin embargo, cuando el entrevistador le pide que haga la operación en el papel, recurre a la escritura vertical que lo conduce a una respuesta incorrecta:

$$\begin{array}{r} 392 \\ -\ \underline{1568} \\ 824 \end{array}$$

En el caso de los valores simbólicos con signo, puede dudarse sobre si el signo está representado explícitamente o si se encuentra «contenido en» el valor simbólico. Así en el ítem x + 1568 = 392, otro entrevistado manifiesta que: «no se puede resolver la ecuación, porque x es siempre positivo. Para que x pudiera ser negativo, deberían escribir -x». Por otra parte, también existe confusión entre las diversas operaciones, interpretándose la suma como resta; la resta como división y la radicación como potenciación y división a la vez. Por ejemplo, en el ítem: $x + \sqrt{13} = \sqrt{13}$, el estudiante pregunta que si $\sqrt{13}$ puede ser decimal. Se le contesta afirmativamente. A lo que responde: «Entonces es 6.5 porque 13 entre 2 es 6.5». Cuando se le presenta la ecuación: $x - \sqrt{3} = 0$, sucede lo siguiente:

— Alumno: *«Es 3, ¡ah, no! es* 9».
— Entrevistador: *«¿Por qué?»*
— Alumno: «A 9 *le restas 9. La* $\sqrt{3}$ *es* 9».

Se advierte la confusión de la radicación con la división (cuando permite que $\sqrt{3}$ sea decimal), así como la radicación con la potenciación (si piensa que la $\sqrt{3}$ es un entero).

I.3 *Inversión de Operaciones.* Frecuentemente se observa que la noción de operación inversa no esta consolidada en el estudiante durante la transición de la aritmética al álgebra. Ello, conduce en ocasiones a la reglas primitivas que permiten obtener la solución correcta. Estas reglas funcionan en situaciones extra-escolares, como sucede con el caso de la regla de «al revés». Así en el ítem 13x = 39, el entrevistado afirma que para encontrar el valor de x, «hay que dividir 13 entre 39». Obtiene el valor 0.33 y verifica que es erróneo. Cuando el entrevistador le pregunta: «¿Qué estará pasando?», contesta: «Hay que hacerlo al revés: dividir 39 entre 13». Nótese que este procedimiento se aplica en situaciones cotidianas muy diversas.

I.4 *Naturaleza Dual de la Igualdad*. En aritmética el signo de igualdad se usa fundamentalmente para relacionar un problema con su respuesta numérica, es decir, como una relación entre un proceso y el resultado de su ejecución. En álgebra, el signo de igualdad tiene un carácter dual: como operador (carácter asimétrico de la igualdad), como equivalencia (carácter simétrico de la igualdad). Cuando en la resolución de ecuaciones se enfatiza la noción de operador y no la de equivalencia, se cometen errores. Así, en los casos entrevistados se presenta el esquema de «cuasi igualdad». El estudiante construye la regla «no importa dónde se realicen las operaciones, con tal que se ejecuten alguna vez». Por ejemplo: 3x + 154 = 475 se considera equivalente a 3x = 475 +154, ya que «da lo mismo que sumes antes o después del signo igual» [21]. La preocupación por operar de inmediato conduce a ignorar el signo de igualdad.

En la Serie de Cancelación se presentan diferentes interpretaciones de la Igualdad [23].

1. *Igualdad Aritmética*: $x + A = \underline{B + A}$. Esto es, el estudiante antes de dar cualquier respuesta «lee» los términos del miembro derecho de la ecuación como un solo número (cierra la operación).

2. *Igualdad de los miembros*: $\underline{x + A} = \underline{B + A}$. Considera cada miembro como un todo. Se desencadena una «lectura visual» en la que se ignora a veces, la operación involucrada en la expresión.

II) NATURALEZA DE LOS NÚMEROS.

II.1 *Enteros Positivos*. En el campo de los enteros positivos se destacan como números especiales el 0 y el 1 [20]. Estos números especiales aparecen en el contexto de las reglas de identidades, es decir: A • l = A y A + 0 = A. Sin embargo, fuera de este contexto, el estudiante confunde estas reglas con otra demasiado general: A $\wedge$(número especial 0 ó 1) = A, donde $\wedge$ denota el operador + ó • . La regla anterior desencadena el error A • 0 = A. Cabe señalar además que en 1 • x = x, generalmente interpretan 1 • x como x pero no advienen que x sea igual a 1 • x. Por otra parte, cuando la solución de la ecuación es cero, existen estudiantes que no aceptan esta solución como válida porque conciben el cero como «la ausencia de valor» y continúan buscando otro número que satisfaga la ecuación. Por último, se manifiesta en la mayoría de los casos entrevistados, la preferencia del estudiante por los enteros positivos hasta el punto que fuerzan el valor de la x para que la ecuación no contenga expresiones fraccionarias. Así, en la ecuación: x - x/13 = 21 - x/13 le asignan a la x en x/13» el valor de 13 para obtener 1, mientras que «la x a solas» tiene el valor de 21 que es un entero.

II.2 *Enteros Negativos*. Con respecto a su enseñanza, existe una asimetría entre los números positivos y los negativos. Los números positivos son más concretos en el sentido de sus relaciones con actividades de medición; así se puede operar con ellos; los números negativos son secundarios, introducidos como resultado de las operaciones [25].

En los casos analizados en el presente trabajo, se muestra a través de las entrevistas, lo difícil que le resulta al estudiante comprender y aceptar los negativos. Por otra parte. ya se mencionó en el Área de Operaciones, el problema de los signos: unario y binario, así como también la desvinculación de la suma y la resta como operaciones inversas. Se ejemplifica con el ítem x + 1568 = 392, la gran dificultad en el manejo de los negativos en todos los niveles.

Nivel Bajo:
E: *«¿Cómo resuelves x + 1568 = 392?»*
A: *«Restándole a 1568, 392: 1176»* (Nótese que resta el mayor al menor).
E: *«¿Está bien el resultado?»*
A: «Sí»
E: *«¿Cómo lo comprobaste?»*
A: «Le *sumé* J92». (Esquema de cuasi igualdad).
E: *«¿Cómo lo verificas?»*
A: *«Sumándole 392 pero no me sale el numero,*
*porque éste (x + **l568** = 392) es mayor que éste (x + 1568 = **392**)».*

En el Nivel Medio, el convencimiento de que la x representa un número positivo, lleva al extremo de alterar la estructura de la ecuación. Un estudiante afirma que la solución de x + 1568 = 392 es x = 4. Argumenta lo siguiente:

A: *«Lo que pasa es que aquí (**x** + 1568 = 392), si tú le sumas a 1568 una cantidad, no te va a dar 392, por más pequeña que sea. Entonces, aquí (**x** + 1568 =* 392) *el signo "+" tiene que cambiar».* (Escribe 1568 + 392 = x).

En el Nivel A, aquellos estudiantes que realizan una lectura tipo abbaco[6] de la ecuación x + 1568 = 392, no conciben una solución negativa.

Otro caso del Nivel A, presenta la misma problemática: el adjudicar a la x sólo valores positivos. Ante el ítem x + 1568 = 392, responde 1960. Al pedirle que verifique, resta 1960-1568. Cuando finalmente advierte su error, manifiesta: «Es que me equivoqué, creí que era positivo aquí (**x** + 1568 = 392)». Nótese la presencia del esquema de cuasi igualdad (1568 + 392) ante la necesidad de la x positiva.

[6] Por lectura o problema tipo abbaco se entiende un enunciado verbal textual de la ecuación, como el siguiente: «Si a un número le sumo 1568 y me da 392 ¿cuál es ese número?»».

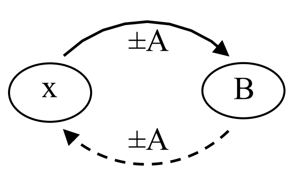
II4 *Polisemia de la Incógnita.* Se manifiesta de la forma siguiente: en una ecuación se llevan a cabo lecturas distintas de la misma x. Esto es, se la interpreta como incógnita o número generalizado a la vez. Así en los ítems $x + x/4 = 6 + x/4$ y $x + 5 = x + x$ de la Serie de Cancelación, la respuesta típica es: «Esta x ($\underline{\mathbf{x}} + x/4 = 6 + x/4$) vale 6 y éstas ($\underline{x} + \underline{\mathbf{x}}/4 = 6 + \underline{\mathbf{x}}/4$) pueden ser cualquier número. Esta x ($x + 5 = x + \underline{\mathbf{x}}$) vale 5 y éstas ($\underline{\mathbf{x}} + 5 = \underline{\mathbf{x}} + x$) pueden tener cualquier valor». En el ítem $2x + 8 = x + 8$, verbalizan: «Esta x ($2\underline{\mathbf{x}} + 8 = x + 8$) es 4 y ésta x ($2x + 8 = \underline{\mathbf{x}} + 8$) es 8». Expresan abiertamente que la x en 2x debe ser la mitad que la x del segundo miembro para que valga lo mismo de ambos lados. Lo que el estudiante pretende es que se «conserve la cantidad» a toda costa. Obsérvese que no tiene aún consolidada la noción de igualdad condicionada, esto es, de ecuación [12].

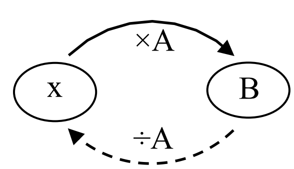
III) MÉTODOS PRIMITIVOS

La Estrategia del Tanteo. La mayoría de los estudiantes que por diversas razones no aceptan el conocimiento escolarizado de inmediato, atacan los problemas algebraicos utilizando aquellos métodos con los que han tenido éxito en la aritmética y les son familiares [4]. Se presentan ahora dos casos entrevistados. El primero recurre a la estrategia del ensayo y error. El segundo muestra un tanteo sistematizado. Se les pide resolver el ítem $6x = 37434$. El primer estudiante recurre a la calculadora en su tanteo. Intenta los números 175, 365, 465, 563, 633. El entrevistador le presenta entonces la ecuación anterior como $6 \times \square = 37434$. En ese momento prueba: 630 y 620. Nótese que los valores encontrados por el alumno al multiplicarlos por 6 conducen a: 6 x 175 = 1050; 6 x 365 = 2190; 6 x 465 = 2790; 6 x 563 = 3378; 6 x 633 = 3798; 6 x 630 = 3780; 6 x 620 = 3720. Se observa que estos números no alcanzan el orden de magnitud deseado. Sin embargo, su tanteo se vuelve sistemático a partir de 633 en que las dos primeras cifras del número del miembro derecho de la igualdad, es decir 37, permanecen iguales a las dos primeras cifras del número del miembro derecho de la ecuación dada. El segundo estudiante se aboca a resolver el ítem $6x = 37434$ sin usar calculadora: Alumno: «6 por 6, 100. Este número ($6x = \underline{\mathbf{37}}434$) podría ser 6, ¿no?» Entrevistador: «A ver, inténtalo». El estudiante comienza a dividir en el papel. El entrevistador sugiere la calculadora y el alumno obtiene el resultado correcto 6239. Nótese que en este caso el estudiante percibe de golpe, a la primera, el orden de magnitud del número buscado.

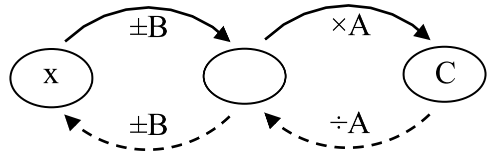
IV) MÉTODOS ESCOLARIZADOS

Uso del Esquema. Se recurre a una representación diagramática, denominada «esquema» [1]. Se enseña primero al estudiante la resolución de las ecuaciones más simples, $x \pm A = B$ y $Ax = B$, por medio de los esquemas de inversión:



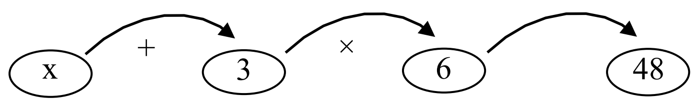


y después se continúa con ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$, $A\times(x \pm B) = C$, utilizando el mismo recurso:

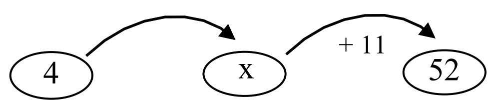


Finalmente, se estudia la solución de ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx$, en las que es necesario operar la incógnita para su solución y no es posible utilizar el esquema anterior. Esto es, el método de solución pasa de requerir solamente la operatividad con números a la necesidad de transferir dicha operatividad a la incógnita.

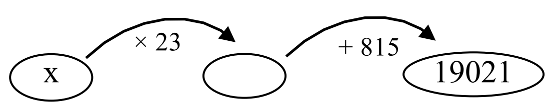
Sucede con frecuencia que el estudiante lleva a cabo una lectura en lenguaje natural del esquema. Esto es, no ha advertido la diferencia entre el lenguaje algebraico y el vernáculo. Nótese que la sintaxis algebraica, en particular el uso del paréntesis y el signo de igualdad, no aparecen explícitamente en la representación esquemática. Es la colocación de los distintos elementos del esquema, la que indica el orden de las operaciones y el cómo efectuar la inversión. En consecuencia, el ignorar que «el esquema está expresado en lenguaje algebraico» conduce a errores como los siguientes: el ítem $(x + 3) \times 6 = 48$ se representa por medio del esquema



Otras formas de lectura incorrectas son las siguientes: $4(x + 11) = 52$ se representa como



Asimismo, $23 \times (x + 815) = 19021$, está expresada por



También aparece una falsa generalización del esquema cuando el estudiante pretende utilizarlo en ecuaciones de la forma: $Ax \pm B = Cx$.

V) SEMÁNTICA Y SINTAXIS DEL ALGEBRA ELEMENTAL

En los casos estudiados, la interacción semántica-sintaxis se analiza con respecto a la invención de un problema a partir de una ecuación dada, entre otros casos. Por ejemplo, ante la orden: «Inventa un problema que se resuelva con la ecuación $x + 4 = 28$», el estudiante encuentra primero la solución. Lo más apremiante es la necesidad de entender el significado del símbolo. Esto es, conocer la incógnita antes de involucrarla en la elaboración del problema (reflejo de la obstrucción del lenguaje a nivel puramente sintáctico).

Por otra parte, se mencionó anteriormente en el Área de Operaciones, la dificultad de concebir la ecuación algebraica como igualdad condicionada. Esto se manifiesta cuando al inventar un problema que resuelve una ecuación, el estudiante omite la pregunta, es decir, aquello que convierte la descripción de una situación en un problema.

Algunas veces el problema propuesto por el alumno es ajeno a la ecuación. Se presentó la situación siguiente:

Entrevistador: «¿Puedes inventar un problema que se resuelva con esta ecuación $4(x + 11) = 52$?».

A: «¿Un problema o nada más una operación?».

E: «Un problema de canicas, o ...».

E: «Un niño tenía 5 canicas y ganó 2 y se le perdieron unas cuantas pero no sabe cuántas...».

Nótese que cuando el estudiante pregunta si se le pide «un problema o nada más una operación», puede ser que pretenda resolver la ecuación. Al sugerírsele el contexto de canicas, esto es, una semántica, abandona la sintaxis anterior [$4(x + 11) = 52$] y se centra en plantear «otro problema». Obsérvese que los nuevos datos son ajenos a la ecuación inicial.

VI) EL CORTE DIDÁCTICO EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES LINEALES

El Trabajo «Operación de la Incógnita» [12] corrobora la existencia y ubicación de un corte didáctico en la línea de evolución de la aritmética al álgebra. A nivel teórico, este corte surge ante la necesidad de operar la incógnita en la resolución de ecuaciones lineales con ocurrencia de la «x» en ambos miembros de la ecuación $Ax \pm B = Cx \pm D$. En el estudio clínico, el corte didáctico es percibido por los niños del nivel alto. Una de las formas de advertirlo es la manifestación verbal de que se encuentran ante nuevas ecuaciones que no saben resolver. Otra manifestación del corte es la polisemia de la x, ya analizada en este trabajo. Inclusive algunos alumnos suponen la existencia de un método escolarizado de ataque para estas nuevas ecuaciones. Por otra parte, los estudiantes de menor rendimiento escolar no encuentran diferencia alguna entre las ecuaciones aritméticas y las ecuaciones no aritméticas mencionadas. Ello se debe, fundamentalmente, a no darse cuenta en lo general del cambio de concepción entre la aritmética y el álgebra, permaneciendo aún en el campo puramente aritmético. Llegan incluso a buscar mecanismos que les permiten interpretar las nuevas ecuaciones con dos ocurrencias de la incógnita como ecuaciones en que la x aparece una sola vez. Por ejemplo, en el ítem $5x = 2x + 3$, un estudiante responde: «5x es igual a 2 por 1, 2 más 3, 5». Así, al realizar acciones en un solo miembro de la ecuación como es el sumar $2x + 3$ una vez que la x tiene un valor asignado, reduce las dos ocurrencias de la incógnita a una.

Ahora bien, es importante señalar que la no percepción explícita del corte didáctico, no lo niega. En este trabajo la existencia de las áreas de dificultad mencionadas avisan que el corte no aflorará en el nivel bajo.

Será necesario resolver estas dificultades en el pre-álgebra, antes de estudiar las primeras ecuaciones no-aritméticas. Esta información no pudo obtenerse a partir de los niños del nivel alto, donde se presenta una automatización de las acciones que vuelve evidente la explicación del porqué y el corno de las situaciones del pre-álgebra. Es decir, los niños de mayor rendimiento escolar no manifiestan la necesidad de explicitar sus procedimientos en situaciones que les resultan completamente rutinarias.

Se presentan ahora las áreas de dificultades comunes en el aprendizaje del álgebra elemental, a manera de síntesis y en forma esquemática en los cuadros de las páginas siguientes.

I. OPERACIONES.

NIVEL A	NIVEL M	NIVEL C
I.1 DUALIDAD DE LA OPERACIÓN		
Permanencia y acción de la Operación (Discriminación correcta de los casos).		Énfasis en la acción de la Operación.
I.2 LECTURA DE LA OPERACIÓN		
Dualidad del signo (Unario-Binario)	Carácter binario del signo	
	Confusión en la lectura de Operaciones	
		Confusión entre operaciones
		Lectura horizontal-vertical de la misma operación.
I.3 INVERSIÓN DE OPERACIONES		
Inversión de operaciones		Inversión de Operaciones condicionada a la representación de la ecuación.
	Regla “Al revés”.	
I.4 NATURALEZA DUAL DE LA IGUALDAD		
Carácter dual del signo de Igualdad. (Discriminación correcta de los casos)	Predominio de la Noción de Operador	
Igualdad de los miembros $\underline{x + A} = \underline{B + A}$		Igualdad Aritmética $x + A = \underline{B + A}$
Igualdad término a término: $x + A = B + A$		Esquema de Cuasi Igualdad.

II. NATURALEZA DE LOS NÚMEROS

NIVEL A	NIVEL M	NIVEL C
II.1 ENTEROS POSITIVOS		
	Rechazo a la solución nula. El cero: la ausencia de valor	Preferencia por los enteros positivos como posibles soluciones de las ecuaciones presentadas. Generalización errónea de la regla: $A \bullet 0 = 0 \Rightarrow A \bullet 0 = A$ $A + 0 = A \Rightarrow A + 0 = 0$
II.2 ENTEROS NEGATIVOS		
La aceptación de soluciones negativas depende de la lectura de la ecuación o de la estrategia utilizada en su resolución.		Utilización de esquema de Cuasi-Igualdad y de la regla de “Al revés”. No se concibe la solución negativa.
La decodificación del símbolo x como número natural inhibe cualquier acción en la resolución de la ecuación.		
Rechazo a la solución negativa: utilización del esquema de Cuasi-Igualdad.	Rechazo a la solución negativa: cambio de la estructura de la ecuación.	
III.3 RACIONALES E IRRACIONALES		
		La interpretación del número racional como “división” ocasiona conflicto en el proceso de verificación.
		Confusión entre número y algoritmo: los números que contienen radicales se operan.
III.4 POLISEMIA DE LA INCÓGNITA		
Interpretación del Símbolo x como número generalizado e incógnita		
	Perturbador: Conservación de la Cantidad	
	Noción de Resultado Aritmético. $a + \frac{x}{b}$ como número mixto.	Preferencia por los enteros. No univalencia de la x en el proceso de resolución.

III. MÉTODOS PRIMITIVOS; EL TANTEO

NIVEL A	NIVEL M	NIVEL C
Ensayo y Error en ecuaciones no Aritméticas.	Tanteo sistematizado en ecuaciones aritméticas y no aritméticas.	Utilización de Hecho Específico. Ensayo y Error. Tanteo Sistematizado en ecuaciones aritméticas y no aritméticas.

IV. MÉTODOS ESCOLAR IZADOS: EL ESQUEMA.

<table>
<tr><th>NIVEL A</th><th>NIVEL M</th><th>NIVEL C</th></tr>
<tr><td colspan="3">Falsa Generalización del Esquema en la resolución de ecuaciones no aritméticas.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Lectura no-algebraica del esquema.
Simplificación del esquema.</td></tr>
</table>

V. SEMÁNTICA Y SINTAXIS DEL ALGEBRA ELEMENTAL

<table>
<tr><th>NIVEL A</th><th>NIVEL M</th><th>NIVEL C</th></tr>
<tr><td colspan="3">V.1 INVENCIÓN DE UN PROBLEMA A PARTIR DE UNA ECUACIÓN DADA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Visualización parcial de la situación problemática que determina la estrategia de ataque al problema.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Confusión entre resolución e invención de un problema.
Intervención de varios lenguajes en la invención de un problema.
Lenguaje en contexto en ecuaciones Ax+B=C</td></tr>
<tr><td colspan="3">V.2 LECTURA DE LA ECUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="3">La lectura de la ecuación determina la estrategia de resolución.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Decodificación incorrecta del símbolo Ax.</td></tr>
<tr><td>Decodificación correcta del símbolo Ax en dos estratos de lenguaje, irreductibles entre sí.</td><td>Omisión del paréntesis.</td></tr>
<tr><td colspan="3">V.3 CREACIÓN DE CÓDIGOS EXTRA-ALGEBRAICOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">El registro de las acciones realizadas sobre la ecuación en el proceso de resolución, anterior a la instauración del lenguaje algebraico, se presenta en los 3 estratos.</td></tr>
</table>

VI. EL CORTE DIDÁCTICO EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES LINEALES

<table>
<tr><th>NIVEL A</th><th>NIVEL M</th><th>NIVEL C</th></tr>
<tr><td colspan="3">POLISEMIA DE LA X</td></tr>
<tr><td>Reconocimiento de nuevas ecuaciones.</td><td colspan="2">No existe distinción entre ecuaciones aritméticas y no aritméticas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">El fracaso en el uso del tanteo y el esquema permite inferir la existencia de un método general de resolución para las ecuaciones no-aritméticas.</td><td colspan="2">Utilización del tanteo y de la falsa generalización del esquema en las ecuaciones no-aritméticas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Reducción de la ecuación no-aritmética a una aritmética.</td></tr>
</table>

Examinando los cuadros anteriores se concluye lo siguiente: un análisis horizontal que permita la comparación de niveles en cada una de las áreas lleva a inferir una línea de evolución de los sujetos en el aprendizaje del álgebra. Por una parte, las dificultades presentadas en el Nivel B se superan en el Nivel A. A su vez, los conflictos surgidos en este último nivel nos avisan de los tropiezos futuros de los niveles más bajos. Además, las dificultades comunes a todos los entrevistados aparecen en el Nivel A en circunstancias de mayor complejidad conceptual que en los casos de los Niveles M y B. Por ejemplo, el esquema de cuasi-igualdad surge en el Nivel B en cualquier situación. Sin embargo, este mismo esquema se presenta en el Nivel A ante el rechazo de la solución negativa. Así también, el Nivel A recurre al ensayo y error sólo en momentos difíciles, mientras que el Nivel B utiliza este método primitivo frecuentemente.

Por otra parte, se observa la tendencia por parte del sujeto a imponer condiciones sobre la situación problemática en los Niveles B y A. Así, la resolución correcta de algunos ítems depende del nivel de lectura asignado a la ecuación. Esto se observa en el Nivel B con respecto a la inversión de operaciones y, en el Nivel A, en relación a la aceptación de soluciones negativas (sub-áreas I.3 y II.2, respectivamente).

Lo anterior confirma que el estudio de las áreas de dificultades exhibe problemas intrínsecos propios de la materia de estudio y su enseñanza, esto es, del álgebra.

Asimismo, el análisis de las entrevistas videograbadas y en consecuencia los resultados en los cuadros anteriores, manifiestan importantes habilidades y recursos de los estudiantes del Nivel B no contemplados en el hecho didáctico. En estos estudiantes se presenta una «versión amplificada» de las dificultades a las que se enfrentan sus demás compañeros, a saber: 1) la no dualidad de conceptos, 2) la inversión de operaciones condicionada, 3) la falsa generalización de reglas, 4) la utilización de recursos extra-escolares, 5) el desarrollo de métodos primitivos de resolución de ecuaciones y, 6) la no discriminación entre el lenguaje natural y el algebraico.

Paradójicamente, el Nivel A muestra también una sub-área de dificultad muy fuerte, más amplificada aún que en el Nivel B: la naturaleza de los números negativos.

Por último, como denominador común a los tres niveles se presentan: 1) la tendencia a la generalización, falsa en ocasiones, 2) la polisemia de la incógnita y, 3) la creación de códigos extra-algebraicos.

De lo anterior se puede concluir que resulta poco confiable clasificar a un individuo como perteneciente a un nivel dado en forma permanente. Los resultados obtenidos advierten que inclusive es difícil asumir que pertenece a un nivel especifico ya que el estudiante puede tener muy buen desarrollo en una dirección (por ejemplo, en la resolución de problemas) y tener deficiencias en otra (sintaxis algebraica). Por consiguiente, este análisis confirma también, otra de las aseveraciones planteadas en el trabajo (pág. 9): la clasificación por niveles depende del objetivo de estudio y no es propia del sujeto.

Ahora bien, es importante señalar que las conclusiones obtenidas a partir de los cuadros anteriores, no deben tomarse como afirmaciones contundentes. De hecho, la confrontación de las hipótesis planteadas requiere de un tratamiento más profundo, a saber, un estudio longitudinal de la población estudiantil en relación al pre-álgebra.

Estudios de Caso

Además del análisis de las áreas de dificultades comunes, se llevaron a cabo, estudios de caso de alumnos del nivel más bajo (nivel cero) con el objeto de examinar en mayor detalle el comportamiento pre-algebraico de esta población. Se encontraron las siguientes características de este nivel extremo.

1. La elección de un método único para la resolución de situaciones problemáticas (Unidireccionalidad del Método). Se registraron tres casos extremos, esto es, tres estudiantes que usaban solamente el tanteo o el esquema, o la calculadora. Que sean casos extremos significa que el tanteo se utiliza aunque la magnitud de los números involucrados en el problema sea grande; que el esquema se emplea siempre, es decir, para ecuaciones tan simples como $x + 5 = 8$, $x - 5 = 0$; en la resolución de problemas tipo abbaco, en la Serie de Cancelación, en ecuaciones no-aritméticas, etc. Así también la calculadora se usa en ecuaciones muy sencillas, por ejemplo en $3x = 6$, en la obtención de resultados muy simples como $16 + 4 =$, pretendiéndose incluso inventar problemas con la calculadora.

2. La invención de reglas a nivel sintáctico, mismas que se desvanecen cuando a la situación problemática se le asocia una semántica específica. Por ejemplo, la que se denominó «La Regla del Resultado Aritmético». Esta regla provoca la asignación de un valor numérico al miembro derecho de la ecuación. Se exhibe en el diálogo mostrado a continuación:

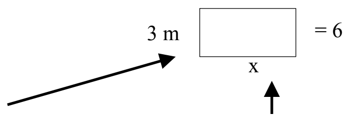
E: «¿Cómo se resuelve la ecuación x + 5 = x + x?».
A: «Aquí $\underline{\mathbf{x}}$*(x + 5 =* $\underline{\mathbf{x}}$ *+* $\underline{\mathbf{x}}$*) vale 1.*
E: «¿Por qué 1? ¿Cómo se te ocurrió que éste (x + 5 = $\underline{\mathbf{x}}$ *+ 5) era 1 y éste (x + 5 = x +* $\underline{\mathbf{x}}$*) era 1 ?».*
A: «Porque sólo cuando está entre las operaciones ($\underline{\mathbf{x}}$ *+ 5 = x + x) x es incógnita, pero cuando está en los resultados (x + 5 =* **x** *+* **x***) es, tiene que ser algún número, a fuerzas».*
E: «O sea, sólo...»
A: «Se supone que ya está la operación hecha».
E: «O sea, sólo cuando está de este lado ($\underline{\mathbf{x}}$ *+ 5 = x + x) puede ser incógnita y de aquel lado (x + 5 =* $\underline{\mathbf{x}}$ *+ x) no puede ser incógnita».*
A: «Se supone que la operación está hecha».
E: Se supone que la operación está hecha y entonces tiene que dar ¿qué cosa o qué?»
A: «Entonces cada uno de éstos (x + 5 = $\underline{\mathbf{x}}$ *+* $\underline{\mathbf{x}}$*) tiene que ser 1 a fuerzas».*

Se observa que el alumno acepta $x + 5$ como expresión abierta pero $x + x$ «debe cerrarse» debido al lugar que ocupa. De los diálogos de esta entrevista se concluye que la noción de igualdad aritmética es utilizada a nivel sintáctico. Sin embargo, cuando la ecuación tiene asociada una semántica adicional, proporcionada por el entrevistador (número de manzanas), el estudiante concibe la igualdad como equivalencia de expresiones.

Otra regla creada a nivel sintáctico por este mismo alumno es la denominada «Regla de la Lectura Invertida de la Operación». Esta regla es aplicada a ecuaciones del tipo $Ax = B$, $B>A$. Consiste en invertir operaciones leyendo de izquierda a derecha: $A + B$, aunque no se lleva a cabo esta acción debido a que invierte de nuevo aplicando el criterio de «número mayor entre número menor»: $B + A$. Esta acción se ejecuta con la calculadora. Se provoca así una compensación de errores, ya que el resultado es válido pero el procedimiento es incorrecto.

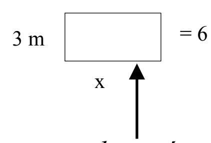
La ecuación planteada por el entrevistador (E) es: $13X = 39$. Al verbalizar el estudiante $13 \div 39$, E recurre a sustituir $13x = 39$ por las expresiones $13 \times X = 39$ y $13 \times \square = 39$. El estudiante repite la misma frase: 13 ÷ 39. Acto seguido E plantea una ecuación más simple 3x = 6. La respuesta es nuevamente 3 ÷ 6. Por último, E escribe 3 × □ = 6, pero el alumno no cambia su lectura 3 ÷ 6. Ante esta situación, E le sugiere la invención de un problema asociado a la ecuación, teniendo lugar el siguiente diálogo:

E: «¿Puedes inventar una pregunta con esto: 3 × □ = 6?»
A: *«¿Un problema?^*
E: *«Sí, un problema».*
A: «Tienes que sacar la superficie de un rectángulo (A dibuja un rectángulo)*».*

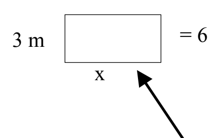


A: *«Este mide 3 metros pero éste no se sabe qué mide. Lo único que se sabe es que el resultado es* 6*».*
E: *^¿El resultado de qué?»*
A: *«De la superficie de todo»,*
E: *«¿Qué es lo que no se sabe?»,*
A: *«El valor de lo más largo».*
E: *«¿Qué es lo que tenemos que encontrar?»*
A: *«El valor del cuadro (3 × □ = 6)».*

E: *«Sí».*



A: *«El valor de esta parte de* aquí».
E: *«¿Y entonces, cómo le hacemos para resolver este problema?»*
A: *«Se tendrá que dividir. Como lo contrario de multiplicar es dividir, se tiene que dividir 6 entre 3»,*
E: *«¿Y cuánto es 6 entre 3?»*
A: «(Usa la calculadora) *2».*
E: *«¿Y está bien?, es decir, ¿resuelves así el problema?»*
A: *«Pues sí».*
E: *«¿Por qué?»*



A: *«Porque ya se sabe qué mide esto. Lo voy a multiplicar: 3 por 2 me va a dar 6».*

Obsérvese que las acciones efectuadas en el modelo son transferidas a la ecuación y viceversa, sin ninguna dificultad. La invención de la falsa regla de la lectura invertida de la operación no era debida a la magnitud de los números involucrados en la ecuación, sino a la situación puramente sintáctica del problema planteado.

3. La existencia de una «Compensación de Errores» que conduce a soluciones válidas en apariencia. Se ha señalado esta compensación en el inciso anterior, en el caso de la regla de la lectura invertida de la operación. Sin embargo, se trata de un comportamiento muy generalizado en esta población. Estos niños recurren a lo escolarizado de manera distinta, mostrando una mayor autonomía en sus acciones, comparados con los demás estudiantes. Ajenos frecuentemente a la enseñanza en el aula, descubren formas propias de abordar los problemas, llegando a soluciones aparentemente correctas aunque hayan

utilizado el método en forma equivocada donde tuvo lugar una compensación de errores. Por ejemplo, en el ítem 13 × □ =39, el estudiante escribe 13 − 39 = 26; verifica:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ \underline{26} \\ 39 \end{array}$$

Se observa que los pasos seguidos en el proceso de resolución del ítem son consistentes. De hecho, el sujeto interpreta el signo «x» como un signo aditivo tanto en la ecuación 13 × □ = 39 como en su verificación:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ \underline{26} \\ 39 \end{array}$$

A partir de esta decodificación equivocada, utiliza correctamente la inversión de operaciones, es decir, resta 13 - 39 = 26.

¡He aquí una compensación de errores surgida de una consistencia entre la interpretación de la ecuación y su proceso de resolución!

Conclusiones del Estudio

Los resultados del análisis de Áreas de Dificultades versus Niveles permiten inferir una línea de evolución de los sujetos en el aprendizaje del álgebra. Por una parte, las dificultades presentadas en el Nivel B se superan en el Nivel A. A su vez, los conflictos surgidos en este último nivel nos avisan de los tropiezos futuros de los niños de los niveles más bajos. Además, las dificultades comunes a todos los entrevistados aparecen en el Nivel A, en circunstancias de mayor complejidad conceptual que en los casos de los niveles M y B. En contraposición a lo anterior, el estudio muestra importantes habilidades de los estudiantes de menor rendimiento escolar, no contempladas en el hecho didáctico» a saber:

1. El tanteo sistematizado.
2. La tendencia a la generalización en los métodos de resolución de ecuaciones.
3. La simplificación en los métodos escolarizados (abreviaciones gráficas del esquema).
4. Los recursos extra-escolares denominados:
    i) La regla de «al revés» (no consolidación de la inversión de operaciones).
    ii) El esquema de cuasi-igualdad (no existe la noción de equivalencia en la igualdad).
    iii) La conservación de la cantidad (no consolidación del concepto de ecuación).
5. La creación de códigos algebraicos.
6. La utilización de diversos lenguajes en la resolución e invención de problemas.

Del estudio de casos, se obtiene la siguiente información adicional:

1. La utilización de un método único de resolución de la situación problemática: «Unidireccionalidad del Método».
2. La invención de reglas propias y la existencia de la compensación del error a nivel puramente sintáctico.

De las conclusiones de este estudio en su conjunto, se puede afirmar que el análisis tanto de las dificultades como de las habilidades de los niños de menor rendimiento escolar, no debe ignorarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental[7]»

[7] Para un análisis mis completo de esta investigación, consultar (17).

Continuación de la Investigación

De todas las consideraciones anteriores, la manifestación crucial de este estudio fue la dificultad extrema que presentaron los enteros negativos. Se confirmó una vez más que estos números constituyen uno de los obstáculos más fuertes con que se enfrenta la enseñanza del álgebra. El conflicto se presentó en todos los niveles, mostrando que dentro del ámbito de las ecuaciones lineales no es trivial darles sentido a estos números.

Cabe preguntarse en este contexto, ¿qué significado tienen las soluciones negativas? ¿Cómo es posible lograr que los estudiantes resuelvan ecuaciones en el conjunto de los números reales, si no pueden dar un significado a las soluciones negativas? Con el objeto de hacer significativas estas soluciones que expresan algebraicamente situaciones concretas, las incógnitas deben representar no sólo magnitudes y cantidades (siempre positivas) sino también relaciones y transformaciones que pueden ser positivas o negativas. Los números negativos se originaron a partir de la necesidad algebraica formal de validar la solución general de las ecuaciones lineales de primer grado, pero no fue sino hasta la algebrización de la geometría (la geometría analítica) que adquieren sentido.

En base a lo anterior, y siguiendo la metodología del proyecto general, nos proponemos profundizar en el estudio de la adquisición del concepto de número, específicamente en el estudio de los números negativos. Pensamos que ello fundamentaría la utilización del plano cartesiano y, por ende, la introducción del concepto de variable en la secundaria. Además, por medio de la gráfica se recuperaría y se haría explícito el contexto geométrico subyacente en las relaciones algebraicas. Esto nos conduciría de manera natural a retomar la investigación en el nivel epistemológico, campo inicial de este trabajo, completándose así el ciclo metodológico: indagación histórico-epistemológica-investigación educativa.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ALARCON J., PFIGUERAS O., FILLOY E., GISPERT M., PARRA B. M., RECIO F., ROJANO T. y ZUBIETA G., «Matemáticas 100 Horas» I y II. Fondo Educativo Interamericano, México, Bogotá, Caracas, Santiago, San Juan y Panamá, 1981-1982.

[2] BELL A. et al., «Algebra: Ideas and Material for years 2-5 in the Secondary School» South Notts Project. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham, 1983.

[3] BONCOMPAGNI B., «Intorno ad Alcune Opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo». Tipografía delle Belle Arti, Roma, 1954.

[4] BOOTH L., «Algebra: Children's Strategies and Errors». NFER-Nelson, 1984.

[5] BROUSSEAU Guy., «Les Obstacless Epistemologiques et les Problèmes en Mathématiques». C.I.E. A.E.M., 1976, pp. 153-168.

[6] (CALANDRI P. M.), ARRIGHI G., «Tractato D'Abbacho». Domus Galileana, Pisa, 1974.

[7] COHÉN L. y MANION L., «Research Methods in Education», Croom Helm, Londres, Camberra, 1980.

[8] EGMOND W. V., «Practical Mathematics in the Italian Renaissance (A catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600)». Suplemento agli Anniali dell'Instituto e Museo di Storia della Scienza, Fasciolo I, Instituto e Museo di Storia della Scienza, Florencia, 1980.

[9] FREUDENTHAL H., «Didactical Phenomenology of Mathematical Structures». Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holanda, 1985.

[10] FREUDENTHAL H.. «Soviet research on Teaching Algebra at the Lower Grades of the Elementary School». Educational Studies in Mathematics, 1974.

[11] FILLOY Eugenio y ROJANO Teresa, «La aparición del lenguaje aritmético-algebraico». L'Educazione Matematica, Anno V, No. 2, Cagliari, 1984.

[12] FILLOY E. y ROJANO T, «From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds)». Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter. Madison, EE. UU., 1984.

[13] FILLOY E. y ROJANO T, «Concrete Models and Processes of Abstraction, Teaching to Operate the Unknown». For the learning of Mathematics, Canada, 1985 (por aparecer).

[14] FILLOY E. y ROJANO T, «Obstructions to the Acquisition of Elementary Algebraic Concepts and Teaching Strategies». Proceedings of the Ninth Annual Meeting of the PME, Utrech, Holanda, 1985, pp. 154-158.

[15] FILLOY E. y ROJANO T, «Operating the Unknown and Models of Teaching (A clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency level in pre-algebra)». Proceedings of the PME-NA, Ohio, EE.UU., 1985.

[16] (FRANCESCA Pierro della), ARRIGHI G., «Trattato D'Abbaco». Domus Galileana, Pisa, 1970.

[17] GALLARDO Aurora., «Habilidades pre-algebraicas en los niños de menor rendimiento escolar». Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. 1987.

[18] GALLARDO A. y ROJANO T., «Common Difficulties in the Leaming of Algebra Among Children Displaying Low and Médium Pre-Algebraic Proficiency Levels». PME, Quebec University, Canada, pp, 301-307. 1987.

[19] GLAESER G., «Epistémologie des nombres relatifs». Recherches en Didactique des Mathématiques, 1981, (2), No. 3, pp. 303-346.

[20] MATZ M., «Towards Computational Theory of Algebraic Competence». Intelligent Tutoring Systems, D. Sieeman & J. S. Brown Academic Press, 1982. Massachusetts Institute of Technology, EE. UU.

[21] KIERAN C., «The Learning of Algebra: A Teaching Experiment», American Educational Research Association, New York, 1982.

[22] (MAZZINGHI Mº Antonio De), BENEDETTO Mº, ARRIGHI G., «Trattado di Fioretti», Domus Galileana, Pisa, 1967.

[23] ROJANO T, «De la Aritmética al Algebra: un estudio clínico con niños de 12a 13 años de edad». Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México, 1985.

[24] ROJANO T, «Leaming and Usage of Algebraic Syntax, Its Semantic Aspects (Case studies with 12-13 year olds)» PME, Michigan State University, EE. UU., 1986, pp. 121-126.

[25] VERGNAUD G., CORTÉS A., «Introducing Algebra to "low level" eighth and ninth graders». Proceedings of the Tenth Intemational Conference «Psychology of Mathematics Education»,1986.

[26] (VIETE F.), WTTMER T. R. (Tr.), «The Analytic Art». The Kent State University» EE. UU., 1983.

[27] WAGNER S., «An analytical framework for mathematical variables». Proceedings of the Fifth Conference of the Intemational Group for Psychology of Mathematics Education. Grenoble, Francia, 1981.